


## 矩阵的运算 教学设计

课程名称	线性代数	授课内容	第二章第二节
授课时间	45 分钟	授课题目	矩阵的运算
所属学科	数学	课程类型	本科生公共基础课
适用对象	理工科各专业本科生	使用教具	投影仪、激光笔
教学背景	<p>在理解了矩阵的概念后, 本节要求掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置、幂及其运算规律. 矩阵是常见的数据类型, 在实际生活生产中经常用到矩阵的运算. 该内容是矩阵概念的拓广和深入, 在实际运用方面起重要作用, 具有不可忽视的地位. 本节课为概念教学课型.</p>		
教学目的	<p>知识目标: (1) 使学生理解和掌握矩阵的运算及其运算律;                  (2) 使学生提高分析矩阵的实际问题和解决矩阵的实际问题的能力.</p> <p>能力目标: (1) 重视基础知识的教学、基本技能的训练和能力的培养;                  (2) 启发学生能够发现问题, 善于独立思考, 学会分析问题和创造地解决问题;                  (3) 通过教师指导发现知识结论, 培养学生抽象概括能力和逻辑思维能力.</p> <p>思政目标: (1) 激发学生民族自豪感, 激发奋斗激情;                  (2) 培养学生坚韧不拔的意志, 以及实事求是的科学学习态度和勇于创新的精神;                  (3) 培育学生精益求精的大国工匠精神, 激发学生科技报国的使命担当.</p>		
教学重点 教学难点	<p>教学重点: 矩阵乘法的计算.</p> <p>教学难点: 矩阵乘法的应用.</p>		
设计思路	<p>问题导入.....通过国产片《哪吒之魔童降世》提出问题, 导入新课</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>运算定义 .....讲解矩阵运算的定义及其运算规律</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>计算方法 .....重点讲解矩阵乘法的计算, 与实数乘法的区别</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>计算举例 .....简单介绍 5G 网络技术, 通过实例消化计算方法</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>在线测试.....通过学习通, 测试知识点掌握情况</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>学以致用.....介绍案例“Matlab 被禁”事件, 求粗体字的实现</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>小结提升.....内容总结, 探究循环比赛的排名问题</p>		
方法手段	<p>教学方法: 引导发现式教学法、问题驱动法.</p> <p>教学手段: 多媒体辅助教学.</p>		
所用教材	《线性代数》湖南工程学院第一版高教出版社.		

环节	教学内容	课堂组织																											
课题导入	<p>一、问题的引入</p> <p>由国产片《哪吒之魔童降世》导入本节主题，对比国内外动画电影技术，简单概括矩阵相关理论在其中的应用.</p>  <p>引例 1: 小王、小李在两次数学考试中答对题数如下表表示:</p> <table border="1" data-bbox="293 913 1182 1160"> <thead> <tr> <th rowspan="2">题型 答题数 姓名</th> <th colspan="3">期中</th> <th colspan="3">期末</th> </tr> <tr> <th>填空题</th> <th>选择题</th> <th>解答题</th> <th>填空题</th> <th>选择题</th> <th>解答题</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>小王</td> <td>10</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>8</td> <td>4</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>小李</td> <td>9</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>7</td> <td>3</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> <p>填空题每题 4 分，选择题 4 分，解答题每题 10 分；</p> <p>1、思考 (1)：如何用矩阵表示他们的答对题数？他们期中、期末的成绩？ 思考 (2)：如果期中占 40%，期末占 60%，求两同学的总评成绩；</p> <p>2、讨论：今天如何通过矩阵运算来研究上述问题？</p>	题型 答题数 姓名	期中			期末			填空题	选择题	解答题	填空题	选择题	解答题	小王	10	3	2	8	4	4	小李	9	5	3	7	3	3	<p>思政点一：点出中国技术的快速发展，增强民族自豪感、激发奋斗激情.</p> <p>3 分钟</p>
题型 答题数 姓名	期中			期末																									
	填空题	选择题	解答题	填空题	选择题	解答题																							
小王	10	3	2	8	4	4																							
小李	9	5	3	7	3	3																							
体验感悟	<p>1、矩阵的加法：</p> <p>(1) 引入：</p> <p>记期中成绩答题数为 <math>A</math>，期末答题数为 <math>B</math>，则：</p> $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ <p>确定两次考试的小王，小李的各题型答题总数的矩阵 <math>C</math></p> $C = A + B = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 6 \\ 16 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ <p>(2) 矩阵的和 (差)； (3) 运算律；</p> <p>2、数乘矩阵：</p> <p>(1) 引入：计算小王、小李各题型平均答题数的矩阵：</p> $\frac{1}{2}(A+B) = \begin{pmatrix} 9 & 3.5 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ <p>(2) 矩阵与实数的积； (3) 运算律；</p>	<p>对于非常简单的矩阵的加减法与数乘，把常见问题用矩阵表述，只通过引例过一遍，要求学生口述答案，增强体验.</p> <p>4 分钟</p>																											

二、矩阵乘法定义

3、矩阵的乘积：

(1) 引例 2：

假如有甲、乙、丙三个商店某年销售同样三种商品的数量（单位：万件）分别为：4, 6, 8; 5, 4, 3; 5, 9, 7.它们可表示为矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix},$$

上述三种商品的单价分别为每万件 2, 5, 7 万元，纯利润分别为每万件 1.9, 4.8, 6.7 万元.那么全年这三个商店销售该三种商品的总销售额可由下列算式给出：

若记  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1.9 \\ 5 & 4.8 \\ 7 & 6.7 \end{pmatrix}$ ，三个商店全年的销售额、纯利润用  $C$ （第一列为

销售额，第二列为纯利润）表示，则上述运算规则可以写成：

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1.9 \\ 5 & 4.8 \\ 7 & 6.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 6 \times 5 + 8 \times 7 & 4 \times 1.9 + 6 \times 4.8 + 8 \times 6.7 \\ 5 \times 2 + 4 \times 5 + 3 \times 7 & 5 \times 1.9 + 4 \times 4.8 + 3 \times 6.7 \\ 5 \times 2 + 9 \times 5 + 7 \times 7 & 5 \times 1.9 + 9 \times 4.8 + 7 \times 6.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 90 \\ 51 & 48.8 \\ 104 & 99.6 \end{pmatrix} = C.$$

(2) 矩阵的乘积：

设  $A = (a_{ij})_{m \times s}$  矩阵， $B = (b_{ij})_{s \times n}$  矩阵，即：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

则定义  $A$  与  $B$  乘积是一个  $m \times n$  的矩阵  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ ，记作： $AB = C = (c_{ij})_{m \times n}$ .

其中， $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$

$$= \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

( $C_{ij}$  等于左  $A$  的第  $i$  行的所有元素与右  $B$  的第  $j$  列的对应元素乘积的和.)

总结引例 2 结果，并引导学生分析矩阵乘法的规律，进而由特殊到一般，得到矩阵乘法的定义。

5 分钟

给出矩阵乘法的定义，强调相乘的条件，结果的形式，计算的方法。

10 分钟

某地有  $I_1, I_2$  两个工厂生产甲、乙、丙三种产品。矩阵  $A$  表示一月中各工厂生产每种产品的数量，矩阵  $B$  表示每种产品的单位价格及单位利润，矩阵  $C$  表示各工厂的总收入和总利润。

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 200 \\ 200 & 100 & 150 \end{pmatrix} \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 20 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{matrix}$$

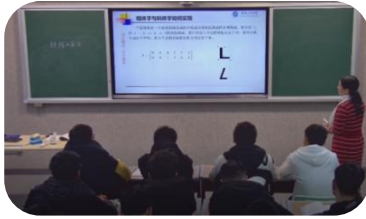
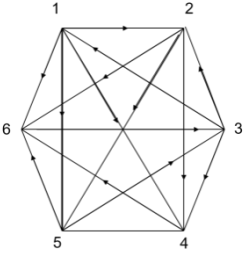

甲 乙 丙      单位 单位  
                  价格 利润

$I_1$  总收入  $C_{11} = 100 \times 15 + 150 \times 20 + 200 \times 10 = 6500$


$$C = \begin{pmatrix} 6500 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}$$

总收入      总利润

应用举例	<p>三、应用举例</p> <p>1、简单介绍 5G 网络技术，指出其技术基础是极化码，本质上就是矩阵的乘法.教师还可简要介绍人工智能技术以及民营企业之星“华为”的故事.</p> <p>2、例 1: 已知 <math>A = \begin{pmatrix} 6 &amp; 2 \\ 3 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; -2 \\ -2 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>, 求: <math>AB</math>, <math>BA</math>.</p> <p>解: <math>AB = \begin{pmatrix} 6 &amp; 2 \\ 3 &amp; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; -2 \\ -2 &amp; 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 2 \times (-2) &amp; 6 \times (-2) + 2 \times 4 \\ 3 \times 1 + 1 \times (-2) &amp; 3 \times (-2) + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 &amp; -4 \\ 1 &amp; -2 \end{pmatrix}</math>,</p> <p>同理: <math>BA = \begin{pmatrix} 1 &amp; -2 \\ -2 &amp; 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 &amp; 2 \\ 3 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 6 + (-2) \times 3 &amp; 1 \times 2 + (-2) \times 1 \\ (-2) \times 6 + 4 \times 3 &amp; (-2) \times 2 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>,</p> <p>此例说明: ① <math>AB \neq BA</math>; ② <math>A \neq 0, B \neq 0</math>, 但 <math>BA = 0</math>.</p> <p>3、在线测试: 已知: <math>A = (1 \ 2 \ 3)</math>, <math>B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}</math>, 求: <math>AB</math>, <math>BA</math>.</p> <p><b>教学设计说明:</b></p> <p>1、矩阵乘法不满足交换律, 这是一个崭新的提法, 是学生从来没有接触过的. 引导学生从具体的运算中找出反例; 观察图形的变化情况, 运用变换矩阵的理论分析变换过程, 使学生从数和形两个方面深化认识, 有助于培养学生从多角度认识问题.</p> <p>2、矩阵乘法满足结合律, 不要求学生能证明, 只要能了解即可.</p> <div data-bbox="531 1120 946 1373" style="text-align: center;"> </div>	<p><b>思政点二:</b> 指出中国技术的快速发展, 增强民族自豪感、激发奋斗激情.</p> <p>例题 1 的价值在于: 任何一个二阶方阵都能分解成几个学生熟悉的二阶变换矩阵的乘积. 因此, 对于二阶变换矩阵的讨论不是片面的.</p> <p style="text-align: center;">讲练结合</p> <p style="text-align: center;">10 分钟</p>
反馈训练	<p>四、学以致用</p> <p>1、介绍案例“Matlab 被禁”事件;</p> <p>2、矩阵乘法在图形学的应用: 平面图形由一个封闭曲线围成的区域或封闭曲线围成的区域构成. 如字母 L, 由 a, b, c, d, e, f 的连线构成, 我们将这六个点的坐标记录下来, 便可由此生成这个字母. 把六个点的坐标按矩阵方式记录下来</p> $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ $PA = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4.25 & 1.25 & 2.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ <p>实现 L 的斜体字.</p> <p><b>教学设计说明:</b></p> <p>介绍案例“Matlab 被禁”事件时进行价值观引领: 当我们在思考如何解“Matlab 被禁”</p>	<p><b>思政点三:</b> 引导学生反思“落后就要挨打”, 进而激发学生的爱国情感和科技报国的责任担当意识.</p> <p>理论指导实践, 通过矩阵乘法解决粗体字的实现.</p>

	<p>这个燃眉之急的同时，更需要考虑如何才能在将来做出像 Matlab 这样的工具，做出能卡别人脖子的技术.我们可以做什么？要求学生发表自己的观点，提高思辨能力.</p> 	10 分钟
归纳总结	<p>1. 矩阵的加减法、数乘;</p> <p>2. 矩阵的乘法是重点，注意与实数乘法的区别;</p> <p>3. 应用提高：循环比赛的成绩 例：已知比赛无平局，只有胜负(如:排球、乒乓球、羽毛球、网球 等)，共有六支队伍，两两之间均比赛过，结果如下图:</p>  <p>问：6 支队伍的成绩如何排名？如果 200 支队伍呢？提炼出数学模型，并进行求解.</p> 	<p>学生小结，再由其他人补充，完善，教师调控.布置应用提高训练题.</p> <p>3 分钟</p>
分层作业	<p>(必做) 第 47 页习题第 1、2 题</p> <p>1. 计算下列矩阵的乘积.</p> <p>(1) <math>\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3 \ 2 \ -1 \ 0);</math>      (2) <math>\begin{pmatrix} 5 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 3 &amp; 1 \\ 0 &amp; 2 &amp; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};</math></p> <p>(3) <math>(1, 2, 3, 4) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};</math>      (4) <math>(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};</math></p> <p>(5) <math>\begin{pmatrix} a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix};</math>      (6) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 3 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 2 &amp; -1 \\ 0 &amp; 0 &amp; -2 &amp; 3 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; -3 \end{pmatrix}.</math></p>	<p>通过分层作业，做到因材施教，使不同的学生在数学上得到不同的发展，让每一个学生都得到符合自身实践的感悟，使不同层次的学生都可以获得成功的喜悦，看到自</p>

	<p>2. 设 <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ -1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 1 &amp; 3 &amp; -1 \\ 3 &amp; 1 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>, (1) 求 <math>AB - 2A</math>, <math>AB - BA</math>; (2) 判断 <math>(A+B)(A-B) = A^2 - B^2</math> 吗?</p> <p>(选做) 思考第 48 页习题第 3、6 题</p> <p>3. 举例说明下列命题是错误的.</p> <p>(1) 若 <math>A^2 = O</math>, 则 <math>A = O</math>; (2) 若 <math>A^2 = A</math>, 则 <math>A = O</math> 或 <math>A = E</math>;</p> <p>(3) 若 <math>AX = AY</math>, <math>A \neq O</math>, 则 <math>X = Y</math>.</p> <p>6. 已知 <math>AP = PB</math>, 其中 <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>, <math>P = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 2 &amp; -1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, 求 <math>A</math> 及 <math>A^5</math></p>	<p>己的潜能, 从而激发学生饱满的学习兴趣, 促进学生自主发展.</p>
--	--	---------------------------------------

<p>教 学 反 思</p>	<p>(一) 成功之处:</p> <p>坚持“以生为本”的教育观, 对学生学习与发展的关系作了认真思考, 强调学生的“经历”, “体会”, “感受”的过程学习; 从学生的发展出发, 加强对学生的“情感”, “态度”, “理性精神”的关注与培养.</p> <p>1. 在教学的设计上融合了专业教学与思政教学</p> <p>1.1. 依据系统理论的基本原则, 确定了课程思政教学设计的基本路线为:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>该路线点面结合, 循序渐进, 力求实现课程思政效果的最优化.</p> <p>1.2. 适当选取思政切入点, 让课程知识点到思政点的过渡更显自然.</p> <p>1.3. 思政案例语言组织精炼, 重点把握在教学目标的达成、教学重难点的精讲.</p> <p>2. 在难点的突破上采取了有效的分解策略</p> <p>2.1. 通过对学生已有的认知结构和学生最近发展区的剖析, 充分利用挖掘教材的背景材料, 以学生能接受的两工厂的总收入与总利润的具体例子, 为学生对矩阵乘法的理解创设了先机, 打开学生从情感上认可和接受“矩阵乘法”的通道.</p> <p>2.2. 对矩阵乘法概念中的几个“重要的关键词”的理解作了恰当的引导和作了精准的导析, 搞清矩阵乘法与实数乘法的区别和联系, 才能使学生真正的理解“矩阵乘法”.</p> <p>2.3. 在过程分析中设计了“回归体验”, 强调注重学生对新知的体验, 突出了矩阵乘法的应用价值, 有利于实现情感目标, 加快了学生同化概念的进程.</p> <p>2.4. 在引导学生小结的过程中, 考察学生是否突破了难点, 以便进行及时的纠正和补充, 分层</p>
----------------------------	---

教 学 反 思	<p>作业中专门设计突破难点的习题，使突破难点得到了保证。</p> <p>3. 在教学的实施上统一了形式与内容</p> <p>3.1. 通过对教材内容、学生情况的分析，较好地解决了“教什么？”--设计中明确指出了知识、能力、情感方面的三维目标；选择了较为恰当的支架过程教法并设计了有操作性的，说出了“怎么教”的具体措施。教师的组织者、引导者、合作者的身份没有动摇学生的主体地位，更没有否定学生智力发展需要有意识的培养。既不高估学生的理解力，也不抹杀学生所具有创造性。</p> <p>3.2. 在教学的第一环节借助了多媒体显示直观、体现过程的优势来展示矩阵乘法的对应乘积求和的特点，这是传统的黑板和粉笔难以做到的。</p> <p><b>(二) 持续改进之处：</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、在课堂细节处理上欠缺，影响到课堂的连贯性。</li> <li>2、与学生的互动不够，导致教学过程中一些环节没有达到预期效果。</li> <li>3、课程思政取得成效的关键在于启发学生思考，实现情感共鸣，需要进一步加强在课前、课中、课后建立系统化的思考，并进行评价与反思。</li> </ol> <p><b>(三) 改进措施</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、平时和课前进一步加强对学生学情的了解，教学设计时尽可能地估计到可能出现的情况，使教学设计尽可能完美。</li> <li>2、为切实提高课程思政的教学效果，持续建立与课中内容一致、更高标准的课程思政作业，使学生进一步提高认识，深化与完善课程思政的效果。</li> <li>3、平时加强对学生沟通、合作意识的培养。教学是一门遗憾的艺术。在今后的教学实践中，我将以本次比赛为起点，不断学习，开拓创新，努力提高自己的教学水平与教学艺术。</li> </ol> <p><b>在教学重建方面：</b>本次教学给我的感悟有四点：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、教书如打仗，知己知彼方可百战百胜。作为教师要深入钻研教材，了解学生的特点，经认真细致准备才能上好一堂课。作为青年教师更应该深入的去研究、学习，练好自己的基本功。</li> <li>2、学生都有积极向上的愿望，教师应该抓住每次机会，去鼓励学生，激发他们的主动意识和进取精神。尽早从传统的课堂教学转向重课程思政、重情感教育、重习惯培养、重思维训练中。</li> <li>3、学生是课堂的主导者，所有的环节都要以学生的实际情况来确定。</li> <li>4、大学数学课程和中学知识脱节严重，教起来很费劲。所以我们可以依据学生在中学学到的数学知识系统和数学知识逻辑，通过知识系统和逻辑的平行对应关系来讲解大学数学里的一些知识难点。这样学生容易理解和接受，教起来也省劲。而这实际上也就是数学上很重要的转化思想。</li> </ol>
------------------	---